Wiskundige basisvaardigheden

Formularium

Algebra

Formules en toepassingsvoorwaarden bij de derde editie.

www.basiswiskunde.be

Inhoud

1 Algebra **2**

1.1 Absolute waarde . . . 2
1.2 Ongelijkheden met absolute waarden . . . 2
1.3 Machten met gehele exponenten . . . 2
1.4 Machten met reële exponenten . . . 2
1.5 Machtswortels: rekenregels . . . 3
1.6 Machtswortels en teken . . . 3
1.7 Logaritmen . . . 3
1.8 Merkwaardige producten . . . 4
1.9 Sommatie-identiteiten . . . 4
1.10 Veeltermdeling en reststelling . . . 4
1.11 Eerste- en tweedegraadsvergelijkingen . . . 5
1.12 Complexe getallen . . . 5
1.13 Toevoeging van complexe getallen . . . 5
1.14 Complexe wortels van een tweedegraadsveelterm . . . 5

1 Algebra

1.1 Absolute waarde

Voorwaarden. $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases}$$

$$d(a,b) = |a-b| = |b-a|$$

In het boek: §1.2.3 · p.19–20

1.2 Ongelijkheden met absolute waarden

Voorwaarden. $x, a \in \mathbb{R},\ b \geq 0.$

$$|x| \leq b \iff -b \leq x \leq b$$

$$|x| \geq b \iff x \geq b \text{ of } x \leq -b$$

$$|x-a| \leq b \iff a-b \leq x \leq a+b$$

$$|x-a| \geq b \iff x \geq a+b \text{ of } x \leq a-b$$

In het boek: §1.2.3

1.3 Machten met gehele exponenten

Voorwaarden. $a, b \neq 0,\ m, n \in \mathbb{Z}$ (deze voorwaarden dekken ook negatieve en nul-exponenten)

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

In het boek: §1.3.1 · p.22–23

1.4 Machten met reële exponenten

Voorwaarden. $a, b > 0,\ r, s \in \mathbb{R}$; voor de wortelnotatie $n \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{N}$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$a^r a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

In het boek: §1.3.3 · p.24–25

1.5 Machtswortels: rekenregels

Voorwaarden. $a, b \geq 0$ en $m, n, p \in \mathbb{N}_0$; voor het quotiënt $b > 0$.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

In het boek: §1.3.2 · p.23–24

1.6 Machtswortels en teken

Voorwaarden. $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ even} \\ a & n \text{ oneven} \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

In het boek: §1.3.2 · p.23–24

1.7 Logaritmen

Voorwaarden. $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$ en $r \in \mathbb{R}$. Alleen voor de laatste formule geldt bovendien $x \neq 1$.

$$\log_a x = r \iff a^r = x$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad \log_a\left(a^r\right) = r$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$\log_a\left(x^r\right) = r \log_a x$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_b x = \frac{1}{\log_x b} \quad (x \neq 1)$$

In het boek: §1.3.5 · p.26–27

1.8 Merkwaardige producten

Voorwaarden. $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3$$
$$(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 + b^3$$

In het boek: §1.4 · p.27

1.9 Sommatie-identiteiten

Voorwaarden. $n \in \mathbb{N}_0$; $x \in \mathbb{R}$ en bij de meetkundige som $x \neq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \quad (x \neq 1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$$

In het boek: §1.5 · p.28–30

1.10 Veeltermdeling en reststelling

Voorwaarden. p, q, t, r zijn veeltermen; $q \neq 0$ en $r = 0$ of de graad van r is kleiner dan die van q. Bij deling door $x - b$ geldt $b \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = t(x)\,q(x) + r(x)$$
$$r = p(b) \quad \text{bij deling door } x - b$$
$$p(x) \text{ deelbaar door } x - b \iff p(b) = 0$$

In het boek: §1.6.1 en §1.6.3 · p.34–38

1.11 Eerste- en tweedegraadsvergelijkingen

Voorwaarden. Reële oplossingen; $a \neq 0$

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0: \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = 0: \quad x = -\frac{b}{2a}$$

$$D < 0: \quad \text{geen reële oplossingen}$$

In het boek: §1.6.2 · p.37

1.12 Complexe getallen

Voorwaarden. $z = a + bi$, $w = c + di$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; voor de inverse $z \neq 0$.

$$i^2 = -1$$

$$z + w = (a + c) + (b + d)\, i$$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i$$

In het boek: §1.8.1–1.8.2

1.13 Toevoeging van complexe getallen

Voorwaarden. $z, w \in \mathbb{C}$; bij het quotiënt $w \neq 0$; $n \geq 1$ geheel.

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad (w \neq 0)$$

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \qquad \overline{\overline{z}} = z$$

In het boek: §1.8.2

1.14 Complexe wortels van een tweedegraadsveelterm

Voorwaarden. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ en $D = b^2 - 4ac < 0$.

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b \pm \sqrt{-D}\, i}{2a}$$

In het boek: §1.8.3