Wiskundige basisvaardigheden

Formularium

Analyse

Formules en toepassingsvoorwaarden bij de derde editie.

www.basiswiskunde.be

Inhoud

7 Analyse **2**

7.1 Rekenkundige en meetkundige rijen . . . 2
7.2 Rekenregels voor limieten . . . 2
7.3 Basislimieten: machten en rationale functies . . . 2
7.4 Basislimieten: exponentiaal en logaritme . . . 3
7.5 Bijzondere limieten bij nul . . . 3
7.6 Asymptoten . . . 3
7.7 Continuïteit en afgeleide in een punt . . . 3
7.8 Rekenregels voor afgeleiden . . . 4
7.9 Basisafgeleiden: machten, exponentiaal en logaritme . . . 4
7.10 Basisafgeleiden: goniometrie en cyclometrie . . . 4
7.11 Raaklijn en functieonderzoek . . . 5
7.12 Basisintegralen: machten en exponentiaal . . . 5
7.13 Basisintegralen: goniometrie en cyclometrie . . . 5
7.14 Lineariteit, substitutie en partiële integratie . . . 6
7.15 Bepaalde integralen en hoofdstelling . . . 6
7.16 Oppervlakte door integratie . . . 6

7 Analyse

Bij onbepaalde integralen volgen we de algebraïsche aanpak van het boek. De formules worden gebruikt waar de uitdrukkingen betekenis hebben; het domein wordt niet telkens afzonderlijk besproken.

7.1 Rekenkundige en meetkundige rijen

Voorwaarden. $n \geq 1$ geheel; r_1 is de eerste term. Het recursieve voorschrift geldt voor $n \geq 2$. Voor de meetkundige machtvorm nemen we $q \neq 0$; de recursieve vorm geldt ook voor $q = 0$.

$$r_n = r_1 + (n-1)\,v \qquad r_n = r_{n-1} + v$$

$$s_n = r_1 + \cdots + r_n = n\frac{r_1 + r_n}{2}$$

$$r_n = r_1 q^{n-1} \qquad r_n = r_{n-1} q$$

$$s_n = r_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

$$s_n = n r_1 \quad (q = 1)$$

In het boek: §7.1.2

7.2 Rekenregels voor limieten

Voorwaarden. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ en $\lim_{x\to a} g(x) = c$ zijn eindig; voor het quotiënt $c \neq 0$. Voor de laatste regel bestaan de domeinen aan beide zijden van a.

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) + g(x)\right) = b + c$$

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)\, g(x)\right) = bc$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{\substack{x\to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = L$$

In het boek: §7.2.4

7.3 Basislimieten: machten en rationale functies

Voorwaarden. $k \in \mathbb{N}_0$. Voor $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ geldt $a_n \neq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & k \text{ even} \\ -\infty & k \text{ oneven} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^k} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^k} = \begin{cases} +\infty & k \text{ even} \\ -\infty & k \text{ oneven} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

In het boek: §7.2.5–7.2.6

7.4 Basislimieten: exponentiaal en logaritme

Voorwaarden. $a > 0$; in de laatste formule $a > 1$ en $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$$

In het boek: §7.2.5

7.5 Bijzondere limieten bij nul

Voorwaarden. $a, b \in \mathbb{R}$; voor de macht wordt $x \neq 0$ en $1 + ax > 0$ genomen. Hoekmaten in radialen.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab}$$

In het boek: §7.2.5

7.6 Asymptoten

Voorwaarden. Elke richting ($+\infty$ of $-\infty$) wordt apart onderzocht. Bij een verticale asymptoot ligt a buiten het domein en bevat het domein een eenzijdige omgeving van a. Bij de schuine asymptoot zijn a, b eindig en $a \neq 0$.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \text{ of } \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \implies x = a \text{ verticale asymptoot}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \implies y = b \text{ horizontale asymptoot}$$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \implies \quad y = ax + b \text{ asymptoot}$$

Dezelfde formules gelden met $x \to -\infty$. De limiet die b bepaalt hoeft niet nul te zijn.

In het boek: §7.3

7.7 Continuïteit en afgeleide in een punt

Voorwaarden. a behoort tot het domein; voor de afgeleide is f gedefinieerd in een omgeving van a en bestaat de eindige limiet.

$$f \text{ continu in } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$f \text{ afleidbaar in } a \implies f \text{ continu in } a$$

In het boek: §7.4–7.5

7.8 Rekenregels voor afgeleiden

Voorwaarden. f, g zijn afleidbaar in a en $c, d \in \mathbb{R}$. Voor het quotiënt $g(a) \neq 0$. Voor de kettingregel is g afleidbaar in $f(a)$.

$$(cf + dg)'(a) = cf'(a) + dg'(a)$$
$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$$
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\,f'(a)$$

In het boek: §7.5

7.9 Basisafgeleiden: machten, exponentiaal en logaritme

Voorwaarden. $c, p \in \mathbb{R}$. Voor x^p nemen we $x > 0$; voor positieve gehele machten geldt de regel ook waar het boek de veeltermfunctie definieert. Voor a^x geldt $a > 0$ en voor $\log_a x$ bovendien $a \neq 1$. Logaritmen en de wortelafgeleide vereisen $x > 0$.

$$(c)' = 0 \qquad (x)' = 1 \qquad (x^p)' = px^{p-1}$$
$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

In het boek: §7.5

7.10 Basisafgeleiden: goniometrie en cyclometrie

Voorwaarden. Hoekmaten in radialen. Tangens vereist $\cos x \neq 0$, cotangens $\sin x \neq 0$. Voor Bgsin en Bgcos geldt $-1 < x < 1$; voor Bgtan en Bgcot geldt $x \in \mathbb{R}$.

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$
$$(\mathrm{Bgsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\mathrm{Bgcos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\mathrm{Bgtan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\mathrm{Bgcot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

In het boek: §7.5

7.11 Raaklijn en functieonderzoek

Voorwaarden. Voor de raaklijn en de extremumvoorwaarde is a een inwendig punt waar f afleidbaar is. Voor stijgen/dalen is f continu op $[a, b]$ en afleidbaar op $]a, b[$; de tekens gelden op dat hele open interval. Voor convexiteit/concaviteit is f tweemaal afleidbaar op een open interval.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$f' > 0 \implies f \text{ strikt stijgend} \qquad f' < 0 \implies f \text{ strikt dalend}$$

$$f \text{ lokaal extremum in } a \implies f'(a) = 0$$

$$f'' > 0 \implies f \text{ convex} \qquad f'' < 0 \implies f \text{ concaaf}$$

Zoals in het boek volstaat $f'(a) = 0$ niet om tot een extremum te besluiten. Onderzoek daarvoor de tekenwisseling van f'.

In het boek: §7.6

7.12 Basisintegralen: machten en exponentiaal

Voorwaarden. $c \in \mathbb{R}$. Voor de vermelde machtsregel $p \neq -1$; voor a^x geldt $a > 0$ en $a \neq 1$.

$$\int x^p \, \mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$$

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c \qquad \int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Voor gehele machten geldt de formule ook voor negatieve waarden van x, voor zover de integrand gedefinieerd is.

In het boek: §7.7.1

7.13 Basisintegralen: goniometrie en cyclometrie

Voorwaarden. Hoekmaten in radialen; $c \in \mathbb{R}$. Voor de laatste formule $-1 < x < 1$.

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c \qquad \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x = \mathrm{Bgtan}\, x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \mathrm{Bgsin}\, x + c$$

In het boek: §7.7.1

7.14 Lineariteit, substitutie en partiële integratie

Voorwaarden. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. De substitutie wordt volledig naar de nieuwe variabele omgezet; bij partiële integratie worden f en g afleidbaar verondersteld.

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x \qquad t = g(x)$$

$$\int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

In het boek: §7.7.1–7.7.3

7.15 Bepaalde integralen en hoofdstelling

Voorwaarden. f, g zijn continu op $[a, b]$; F is een primitieve van f; $c \in [a, b]$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

In het boek: §7.8

7.16 Oppervlakte door integratie

Voorwaarden. $a < b$; f, g zijn continu op $[a, b]$.

$$O = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$O_{\text{tussen}} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

In het boek: §7.8, Toepassingen