Wiskundige basisvaardigheden

Formularium

Goniometrie

Formules en toepassingsvoorwaarden bij de derde editie.

www.basiswiskunde.be

Inhoud

4 Goniometrie **2**

4.1 Graden en radialen . . . 2
4.2 Goniometrische getallen en grondformule . . . 2
4.3 Bijzondere hoeken . . . 2
4.4 Verwante hoeken en periodiciteit . . . 2
4.5 Rechthoekige driehoeken . . . 3
4.6 Sinus- en cosinusregel . . . 3
4.7 Som- en verschilformules . . . 3
4.8 Verdubbelingsformules . . . 3
4.9 Formules van Carnot . . . 4
4.10 De t-formules . . . 4
4.11 Formules van Simpson . . . 4
4.12 Omgekeerde formules van Simpson . . . 4
4.13 Cyclometrische getallen . . . 4
4.14 Goniometrische basisvergelijkingen . . . 5
4.15 Poolcoördinaten . . . 5
4.16 Modulus en inverse van complexe getallen . . . 5
4.17 Complexe getallen: goniometrische vorm . . . 5
4.18 Complexe machtswortels . . . 5

4 Goniometrie

4.1 Graden en radialen

Voorwaarden. p is de hoekmaat in graden en α de hoekmaat in radialen. Het zijn de notaties uit het boek.

$$360^\circ = 2\pi \,\text{rad}$$
$$p^\circ = p\frac{\pi}{180}\,\text{rad} \qquad \alpha\,\text{rad} = \alpha\frac{180}{\pi}{}^\circ$$

In het boek: §4.1

4.2 Goniometrische getallen en grondformule

Voorwaarden. $\alpha \in \mathbb{R}$. Voor tan, sec geldt $\cos\alpha \neq 0$; voor cot, csc geldt $\sin\alpha \neq 0$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$
$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$
$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

In het boek: §4.2 en §4.4

4.3 Bijzondere hoeken

Voorwaarden. Hoekmaten in radialen. Een streepje betekent: niet gedefinieerd.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

In het boek: §4.2.1

4.4 Verwante hoeken en periodiciteit

Voorwaarden. $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$; de tangens moet gedefinieerd zijn.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$
$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$$

In het boek: §4.2.2 en §6.7.1–6.7.2

4.5 Rechthoekige driehoeken

Voorwaarden. A is de schuine zijde; B, C zijn de rechthoekszijden. γ is een scherpe hoek.

$$A^2 = B^2 + C^2$$
$$\sin\gamma = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$$
$$\cos\gamma = \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$$
$$\tan\gamma = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}}$$

In het boek: §4.3.1

4.6 Sinus- en cosinusregel

Voorwaarden. Niet-ontaarde driehoek met zijden $A, B, C > 0$ en overstaande hoeken $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$.

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha$$
$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$

In het boek: §4.3.2

4.7 Som- en verschilformules

Voorwaarden. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Voor tangens: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

In het boek: §4.4

4.8 Verdubbelingsformules

Voorwaarden. $\alpha \in \mathbb{R}$; voor tangens $\cos\alpha \neq 0$ en $1 - \tan^2\alpha \neq 0$.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

In het boek: §4.4

4.9 Formules van Carnot

Voorwaarden. $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$
$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

In het boek: §4.4

4.10 De t-formules

Voorwaarden. $t = \tan(\alpha/2)$ moet bestaan, dus $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ voor $k \in \mathbb{Z}$. Voor $\tan\alpha$ bovendien $t \neq \pm 1$.

$$\cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$$
$$\tan\alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$$

In het boek: §4.4

4.11 Formules van Simpson

Voorwaarden. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

In het boek: §4.4

4.12 Omgekeerde formules van Simpson

Voorwaarden. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

In het boek: §4.4

4.13 Cyclometrische getallen

Voorwaarden. Voor Bgsin en Bgcos geldt $x \in [-1, 1]$; voor Bgtan en Bgcot geldt $x \in \mathbb{R}$. Hoekmaten in radialen.

$$y = \mathrm{Bgsin}\, x \iff \sin y = x \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$
$$y = \mathrm{Bgcos}\, x \iff \cos y = x \qquad 0 \leq y \leq \pi$$
$$y = \mathrm{Bgtan}\, x \iff \tan y = x \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$
$$y = \mathrm{Bgcot}\, x \iff \cot y = x \qquad 0 < y < \pi$$

In het boek: §4.5

4.14 Goniometrische basisvergelijkingen

Voorwaarden. $k \in \mathbb{Z}$; voor de eerste twee regels $c \in [-1, 1]$ en voor de laatste $d \in \mathbb{R}$.

$$\sin x = c \iff \begin{cases} x = \operatorname{Bgsin} c + 2k\pi \\ \text{of } x = \pi - \operatorname{Bgsin} c + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos x = c \iff x = \pm \operatorname{Bgcos} c + 2k\pi$$

$$\tan x = d \iff x = \operatorname{Bgtan} d + k\pi$$

In het boek: §4.6.1

4.15 Poolcoördinaten

Voorwaarden. $r \geq 0$; de hoek θ wordt bepaald op een geheel veelvoud van 2π na.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

In het boek: §4.7

4.16 Modulus en inverse van complexe getallen

Voorwaarden. $z = a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$. Voor de inverse $z \neq 0$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

In het boek: §4.8.1–4.8.2

4.17 Complexe getallen: goniometrische vorm

Voorwaarden. $z_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)$ met $r_j = |z_j|$; voor het quotiënt $z_2 \neq 0$. θ is een argument van z; voor De Moivre $n \geq 1$ geheel.

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

In het boek: §4.8.1–4.8.2

4.18 Complexe machtswortels

Voorwaarden. $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ en $n \geq 1$ geheel. De formules geven de n verschillende n-de machtswortels van z.

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

In het boek: §4.8.3