Wiskundige basisvaardigheden

Formularium

Kansrekening en statistiek

Formules en toepassingsvoorwaarden bij de derde editie.

www.basiswiskunde.be

Inhoud

9 Kansrekening en statistiek 2

9.1 Som- en productregel voor aantallen . . . 2
9.2 Permutaties en variaties . . . 2
9.3 Combinaties, Pascal en Newton . . . 2
9.4 Gemiddelde en relatieve frequenties . . . 2
9.5 Beschrijvende spreidingsmaten . . . 3
9.6 Schatting van variantie en standaardafwijking . . . 3
9.7 Kanswetten en uniforme kans . . . 3
9.8 Voorwaardelijke kans en onafhankelijkheid . . . 3
9.9 Totale kans en Bayes . . . 4
9.10 Productwet voor meerdere gebeurtenissen . . . 4
9.11 Discrete kansveranderlijken . . . 4
9.12 Binomiale verdeling . . . 4
9.13 Continue kansveranderlijken . . . 5
9.14 Normale verdeling en standaardiseren . . . 5

9 Kansrekening en statistiek

9.1 Som- en productregel voor aantallen

Voorwaarden. A, B zijn eindige verzamelingen. Bij de productregel zijn er in stap i steeds n_i mogelijkheden, ongeacht de eerdere keuzes.

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$n_1 n_2 \cdots n_r \quad \text{(aantal mogelijkheden bij de productregel)}$$

In het boek: §9.1.1

9.2 Permutaties en variaties

Voorwaarden. $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; zonder herhaling $0 \leq p \leq n$. De volgorde telt mee. Voor herhalingspermutaties zijn $n_1 + \cdots + n_r = n$.

$$0! = 1 \qquad n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \qquad P_n = n!$$

$$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad \overline{V}_n^p = n^p$$

$$P_n^{n_1,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}$$

In het boek: §9.1.2

9.3 Combinaties, Pascal en Newton

Voorwaarden. $n, p \in \mathbb{N}$, voor gewone combinaties $0 \leq p \leq n$; de volgorde telt niet mee. Voor herhalingscombinaties $n \geq 1$. Voor Pascal $1 \leq p \leq n-1$. Voor Newton $a, b \in \mathbb{R}$ en $n \geq 1$.

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \qquad C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$\overline{C}_n^p = C_{n+p-1}^p$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad (1 \leq p \leq n-1)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

In het boek: §9.1.3

9.4 Gemiddelde en relatieve frequenties

Voorwaarden. $n \geq 1$ waarnemingen $x_1, \ldots, x_n$. De k verschillende waarden ω_j hebben absolute frequentie F_j en relatieve frequentie f_j.

$$f_j = \frac{F_j}{n}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_j f_j$$

In het boek: §9.2.1

9.5 Beschrijvende spreidingsmaten

Voorwaarden. $n \geq 1$; $\overline{x}$ is het gemiddelde en f_j zijn relatieve frequenties. Hier wordt door n gedeeld: dit zijn beschrijvende maten.

$$R = \max_i x_i - \min_i x_i$$

$$\text{Mad} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| = \sum_j |\omega_j - \overline{x}| f_j$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_j \left(\omega_j - \overline{x}\right)^2 f_j$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\sum_j \left(\omega_j - \overline{x}\right)^2 f_j}$$

In het boek: §9.2.1

9.6 Schatting van variantie en standaardafwijking

Voorwaarden. Een steekproef met $n \geq 2$ waarnemingen. In deze formules zijn s^2 en s de te schatten spreidingsmaten van de populatie, zoals in het boek.

$$s^2 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

$$s \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

In het boek: §9.2.1, Schatten van spreidingsmaten

9.7 Kanswetten en uniforme kans

Voorwaarden. A, B zijn gebeurtenissen in een kansruimte met uitkomstenverzameling Ω. Voor Laplace is Ω eindig, niet leeg en zijn alle uitkomsten even waarschijnlijk.

$$P(\Omega) = 1 \qquad P(\varnothing) = 0 \qquad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \quad \text{(uniforme kans)}$$

In het boek: §9.3

9.8 Voorwaardelijke kans en onafhankelijkheid

Voorwaarden. Voor $P(A \mid B)$ geldt $P(B) > 0$; voor $P(B \mid A)$ geldt $P(A) > 0$. De definitie van onafhankelijkheid vereist geen strikt positieve kansen.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) = P(A)\,P(B \mid A)$$

$$A, B \text{ onafhankelijk} \iff P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

In het boek: §9.3

9.9 Totale kans en Bayes

Voorwaarden. $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ is een eindige partitie met $P(A_i) > 0$ voor alle i. Voor Bayes bovendien $P(B) > 0$.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)\, P(A_i)$$

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k)\, P(A_k)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)\, P(A_i)}$$

In het boek: §9.3, Kanswetten

9.10 Productwet voor meerdere gebeurtenissen

Voorwaarden. $k \geq 2$. Alle conditionerende doorsneden $A_j \cap \cdots \cap A_k$ voor $j = 2, \ldots, k$ hebben strikt positieve kans.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1 \mid A_2 \cap \cdots \cap A_k) \\ \cdot P(A_2 \mid A_3 \cap \cdots \cap A_k) \\ \cdots P(A_{k-1} \mid A_k)\, P(A_k) \end{aligned}$$

In het boek: §9.3, Kanswetten

9.11 Discrete kansveranderlijken

Voorwaarden. x_i zijn de verschillende mogelijke waarden van de discrete kansveranderlijke X. Voor de verwachting en variantie moeten de betrokken sommen convergeren.

$$f_X(x_i) = P(X = x_i)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$$

$$E(X) = \sum_i x_i f_X(x_i)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 f_X(x_i)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

In het boek: §9.4

9.12 Binomiale verdeling

Voorwaarden. X telt successen in $n \geq 1$ onafhankelijke proeven met dezelfde succeskans $p \in]0, 1[$; $q = 1 - p$, $k = 0, \ldots, n$. Bij $p = 0$ of $p = 1$ is X constant.

$$X \sim B(n, p) \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$E(X) = np \qquad \mathrm{Var}(X) = npq \qquad \sigma_X = \sqrt{npq}$$

In het boek: §9.5.1

9.13 Continue kansveranderlijken

Voorwaarden. f is een kansdichtheid en $a \leq b$. De integralen voor verwachting en variantie moeten convergeren; voor de verwachting wordt absolute convergentie vereist.

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \qquad P(X = a) = 0$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

In het boek: §9.5.2

9.14 Normale verdeling en standaardiseren

Voorwaarden. $X \sim N(\mu, \sigma)$ met $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$. De tweede parameter is de standaardafwijking. F is de verdelingsfunctie van X; voor intervalkansen $a \leq b$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$E(X) = \mu \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \qquad \sigma_X = \sigma$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad Z \sim N(0, 1)$$

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

In het boek: §9.5.3