Wiskundige basisvaardigheden

Formularium

Lineaire algebra

Formules en toepassingsvoorwaarden bij de derde editie.

www.basiswiskunde.be

Inhoud

2 Lineaire algebra **2**

2.1 Matrixbewerkingen en orde 2

2.2 Transponeren 2

2.3 Inverse matrices 2

2.4 Determinanten 2

2.5 Cofactorontwikkeling 3

2.6 Adjunctmatrix en het bestaan van een inverse 3

2.7 Regel van Cramer 3

2 Lineaire algebra

2.1 Matrixbewerkingen en orde

Voorwaarden. $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ bij optelling; $\lambda \in \mathbb{R}$. Bij het product heeft A afmeting $m \times n$ en B afmeting $n \times p$; $C = AB$ heeft orde $m \times p$. Alle matrixproducten hebben passende orde.

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$C = AB \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$$A(BC) = (AB)C \qquad I_m A = A = A I_n$$

Matrixproducten zijn in het algemeen niet commutatief.

In het boek: §2.1.1–2.1.2

2.2 Transponeren

Voorwaarden. Matrices hebben passende orde; $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

In het boek: §2.1.1–2.1.2

2.3 Inverse matrices

Voorwaarden. A is een inverteerbare vierkante matrix van orde n.

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

In het boek: §2.1.3

2.4 Determinanten

Voorwaarden. $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ en $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \qquad \det\left(A^T\right) = \det(A)$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad \text{voor een driehoeksmatrix}$$

Twee rijen verwisselen keert het teken om. Een veelvoud van een andere rij bij een rij optellen behoudt de determinant. Een rij met een factor vermenigvuldigen vermenigvuldigt de determinant met die factor.

In het boek: §2.3.1

2.5 Cofactorontwikkeling

Voorwaarden. A is een vierkante matrix van orde $n > 1$. A_{ij} is de cofactor van a_{ij}: $(-1)^{i+j}$ maal de determinant na schrappen van rij i en kolom j.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad \text{(ontwikkeling naar rij } i\text{)}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \quad \text{(ontwikkeling naar kolom } j\text{)}$$

In het boek: §2.3.1

2.6 Adjunctmatrix en het bestaan van een inverse

Voorwaarden. $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. De adjunctmatrix ontstaat door de cofactormatrix te transponeren. Voor de inverseformule geldt $\det(A) \neq 0$.

$$A \text{ inverteerbaar} \iff \det(A) \neq 0$$

$$A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) A = \det(A) I_n$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

In het boek: §2.3.2

2.7 Regel van Cramer

Voorwaarden. A is een vierkante matrix van orde n, $|A| = \det(A) \neq 0$. A_i ontstaat door kolom i van A te vervangen door de kolom B van de onafhankelijke termen. Dit is de unieke oplossing van het stelsel $AX = B$.

$$\left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_n|}{|A|} \right)$$

In het boek: §2.3.2