Wiskundige basisvaardigheden

Formularium

Ruimtemeetkunde

Formules en toepassingsvoorwaarden bij de derde editie.

www.basiswiskunde.be

Inhoud

5 Ruimtemeetkunde **2**

5.1 Rechten in de ruimte . . . 2
5.2 Vlakken: vectoren en parameters . . . 2
5.3 Vlakken: cartesische vergelijking . . . 2
5.4 Norm, afstand en inproduct in de ruimte . . . 2
5.5 Loodrechte en evenwijdige stand . . . 3
5.6 Afstand tussen een punt en een vlak . . . 3
5.7 Vectorieel en gemengd product . . . 3
5.8 Oppervlakte en volume met vectoren . . . 3
5.9 Oppervlakte en volume van ruimtelijke figuren . . . 4

5 Ruimtemeetkunde

5.1 Rechten in de ruimte

Voorwaarden. In E^3; $\vec{v} \neq \vec{o}$. Door twee verschillende punten kan $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ genomen worden.

$$\vec{x} = \vec{a} + \mu\vec{v} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \quad (v_1 v_2 v_3 \neq 0)$$

Als een richtingsgetal nul is, gebruik de parametervorm of vervang de bijbehorende breuk door de vergelijking van die constante coördinaat.

In het boek: §5.1.1 en §5.3.1–5.3.2

5.2 Vlakken: vectoren en parameters

Voorwaarden. $\vec{v}, \vec{w}$ zijn niet-evenwijdige, niet-nulle richtingsvectoren. Door drie niet-collineaire punten kan $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{w} = \vec{c} - \vec{a}$ genomen worden.

$$\vec{x} = \vec{a} + \mu\vec{v} + \lambda\vec{w} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

In het boek: §5.1.2 en §5.3.3

5.3 Vlakken: cartesische vergelijking

Voorwaarden. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$; $\vec{n}$ is een normaalvector.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

In het boek: §5.3.4 en §5.5.1

5.4 Norm, afstand en inproduct in de ruimte

Voorwaarden. Vectoren in E^3 in een orthonormale basis. Voor de hoek $\alpha \in [0, \pi]$ zijn beide betrokken vectoren niet nul.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \cos\alpha$$

In het boek: §5.4

5.5 Loodrechte en evenwijdige stand

Voorwaarden. Richtingsvectoren van rechten en normaalvectoren van vlakken zijn niet nul. $k \neq 0$. Het vlak heeft vergelijking $ax + by + cz + d = 0$; bij twee vlakken zijn de normaalvectoren (a_i, b_i, c_i).

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \quad \text{(loodrechte rechten)}$$

$$(a, b, c) = k\,(v_1, v_2, v_3) \quad \text{(rechte loodrecht op vlak)}$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \quad \text{(loodrechte vlakken)}$$

$$(v_1, v_2, v_3) = k\,(w_1, w_2, w_3) \quad \text{(evenwijdige rechten)}$$

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \quad \text{(rechte evenwijdig met vlak)}$$

Zoals in het boek betekent loodrecht voor twee rechten dat hun richtingsvectoren orthogonaal zijn; de rechten hoeven elkaar niet te snijden.

In het boek: §5.5.1–5.5.2

5.6 Afstand tussen een punt en een vlak

Voorwaarden. $\vec{p} = (x_0, y_0, z_0)$; het vlak α heeft vergelijking $ax + by + cz + d = 0$ met $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

$$d\,(\vec{p}, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

In het boek: §5.5.4

5.7 Vectorieel en gemengd product

Voorwaarden. Vectoren in E^3 ten opzichte van een positief georiënteerde orthonormale basis.

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

De determinant met basisvectoren in de eerste rij is een geheugensteun, zoals in het boek.

In het boek: §5.6.1–5.6.2

5.8 Oppervlakte en volume met vectoren

Voorwaarden. Voor het parallellogram zijn $\vec{v}, \vec{w}$ niet-evenwijdig. Voor het parallellepipedum liggen $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ niet in één vlak met de oorsprong.

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| \quad \text{(oppervlakte parallellogram)}$$

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| \quad \text{(volume parallellepipedum)}$$

In het boek: §5.6.1–5.6.2

5.9 Oppervlakte en volume van ruimtelijke figuren

Voorwaarden. $l, b, h, r > 0$; G is de grondvlakoppervlakte. De cilinder en kegel zijn recht en cirkelvormig; $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ is de schuine zijde van de kegel. O is de totale oppervlakte.

$$\text{Balk:} \quad V = lbh \qquad O = 2\,(lb + bh + lh)$$

$$\text{Cilinder:} \quad V = \pi r^2 h \qquad O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$\text{Prisma:} \quad V = Gh \qquad O = 2G + O_{\text{zijvlakken}}$$

$$\text{Piramide:} \quad V = \frac{1}{3}Gh \qquad O = G + O_{\text{zijvlakken}}$$

$$\text{Kegel:} \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad O = \pi r^2 + \pi r s$$

$$\text{Bol:} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad O = 4\pi r^2$$

In het boek: §5.6.3