Wiskundige basisvaardigheden

Formularium

Alle hoofdstukken

Formules en toepassingsvoorwaarden bij de derde editie.

www.basiswiskunde.be

Inhoud

1 Algebra **4**

1.1 Absolute waarde . . . 4
1.2 Ongelijkheden met absolute waarden . . . 4
1.3 Machten met gehele exponenten . . . 4
1.4 Machten met reële exponenten . . . 4
1.5 Machtswortels: rekenregels . . . 5
1.6 Machtswortels en teken . . . 5
1.7 Logaritmen . . . 5
1.8 Merkwaardige producten . . . 6
1.9 Sommatie-identiteiten . . . 6
1.10 Veeltermdeling en reststelling . . . 6
1.11 Eerste- en tweedegraadsvergelijkingen . . . 7
1.12 Complexe getallen . . . 7
1.13 Toevoeging van complexe getallen . . . 7
1.14 Complexe wortels van een tweedegraadsveelterm . . . 7

2 Lineaire algebra **8**

2.1 Matrixbewerkingen en orde . . . 8
2.2 Transponeren . . . 8
2.3 Inverse matrices . . . 8
2.4 Determinanten . . . 8
2.5 Cofactorontwikkeling . . . 9
2.6 Adjunctmatrix en het bestaan van een inverse . . . 9
2.7 Regel van Cramer . . . 9

3 Vlakke meetkunde **10**

3.1 Rechten: vectoren en parameters . . . 10
3.2 Rechten: cartesische vormen . . . 10
3.3 Norm, afstand en inproduct . . . 10
3.4 Ligging en afstand tot een rechte . . . 10
3.5 Cirkel en ellips . . . 11
3.6 Parabool . . . 11

3.7 Hyperbool en asymptoten . . . 11

4 Goniometrie **12**

4.1 Graden en radialen . . . 12
4.2 Goniometrische getallen en grondformule . . . 12
4.3 Bijzondere hoeken . . . 12
4.4 Verwante hoeken en periodiciteit . . . 12
4.5 Rechthoekige driehoeken . . . 13
4.6 Sinus- en cosinusregel . . . 13
4.7 Som- en verschilformules . . . 13
4.8 Verdubbelingsformules . . . 13
4.9 Formules van Carnot . . . 14
4.10 De t-formules . . . 14
4.11 Formules van Simpson . . . 14
4.12 Omgekeerde formules van Simpson . . . 14
4.13 Cyclometrische getallen . . . 14
4.14 Goniometrische basisvergelijkingen . . . 15
4.15 Poolcoördinaten . . . 15
4.16 Modulus en inverse van complexe getallen . . . 15
4.17 Complexe getallen: goniometrische vorm . . . 15
4.18 Complexe machtswortels . . . 15

5 Ruimtemeetkunde **16**

5.1 Rechten in de ruimte . . . 16
5.2 Vlakken: vectoren en parameters . . . 16
5.3 Vlakken: cartesische vergelijking . . . 16
5.4 Norm, afstand en inproduct in de ruimte . . . 16
5.5 Loodrechte en evenwijdige stand . . . 17
5.6 Afstand tussen een punt en een vlak . . . 17
5.7 Vectorieel en gemengd product . . . 17
5.8 Oppervlakte en volume met vectoren . . . 17
5.9 Oppervlakte en volume van ruimtelijke figuren . . . 18

6 Reële functies **19**

6.1 Bewerkingen met functies . . . 19
6.2 Samenstelling van functies . . . 19
6.3 Inverse functies . . . 19
6.4 Verschuiven en herschalen . . . 19
6.5 Even en oneven functies . . . 19
6.6 Natuurlijke exponentiaal en logaritme . . . 20
6.7 Algemene sinusoïde . . . 20
6.8 Domein en codomein van basisfuncties . . . 20

7 Analyse **21**
7.1 Rekenkundige en meetkundige rijen . . . 21
7.2 Rekenregels voor limieten . . . 21
7.3 Basislimieten: machten en rationale functies . . . 21
7.4 Basislimieten: exponentiaal en logaritme . . . 22
7.5 Bijzondere limieten bij nul . . . 22
7.6 Asymptoten . . . 22
7.7 Continuïteit en afgeleide in een punt . . . 22
7.8 Rekenregels voor afgeleiden . . . 23
7.9 Basisafgeleiden: machten, exponentiaal en logaritme . . . 23
7.10 Basisafgeleiden: goniometrie en cyclometrie . . . 23
7.11 Raaklijn en functieonderzoek . . . 24
7.12 Basisintegralen: machten en exponentiaal . . . 24
7.13 Basisintegralen: goniometrie en cyclometrie . . . 24
7.14 Lineariteit, substitutie en partiële integratie . . . 25
7.15 Bepaalde integralen en hoofdstelling . . . 25
7.16 Oppervlakte door integratie . . . 25

8 Logica, verzamelingen en bewijstechnieken **26**
8.1 Logische verbindingen . . . 26
8.2 Logische equivalenties . . . 26
8.3 Negatie van kwantoren . . . 26
8.4 Bewerkingen met verzamelingen . . . 26
8.5 Cartesisch product . . . 27

9 Kansrekening en statistiek **28**
9.1 Som- en productregel voor aantallen . . . 28
9.2 Permutaties en variaties . . . 28
9.3 Combinaties, Pascal en Newton . . . 28
9.4 Gemiddelde en relatieve frequenties . . . 28
9.5 Beschrijvende spreidingsmaten . . . 29
9.6 Schatting van variantie en standaardafwijking . . . 29
9.7 Kanswetten en uniforme kans . . . 29
9.8 Voorwaardelijke kans en onafhankelijkheid . . . 29
9.9 Totale kans en Bayes . . . 30
9.10 Productwet voor meerdere gebeurtenissen . . . 30
9.11 Discrete kansveranderlijken . . . 30
9.12 Binomiale verdeling . . . 30
9.13 Continue kansveranderlijken . . . 31
9.14 Normale verdeling en standaardiseren . . . 31

1 Algebra

1.1 Absolute waarde

Voorwaarden. $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases}$$

$$d(a,b) = |a-b| = |b-a|$$

In het boek: §1.2.3 · p.19–20

1.2 Ongelijkheden met absolute waarden

Voorwaarden. $x, a \in \mathbb{R},\ b \geq 0.$

$$|x| \leq b \iff -b \leq x \leq b$$

$$|x| \geq b \iff x \geq b \text{ of } x \leq -b$$

$$|x-a| \leq b \iff a-b \leq x \leq a+b$$

$$|x-a| \geq b \iff x \geq a+b \text{ of } x \leq a-b$$

In het boek: §1.2.3

1.3 Machten met gehele exponenten

Voorwaarden. $a, b \neq 0,\ m, n \in \mathbb{Z}$ (deze voorwaarden dekken ook negatieve en nul-exponenten)

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

In het boek: §1.3.1 · p.22–23

1.4 Machten met reële exponenten

Voorwaarden. $a, b > 0,\ r, s \in \mathbb{R}$; voor de wortelnotatie $n \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{N}$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$a^r a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

In het boek: §1.3.3 · p.24–25

1.5 Machtswortels: rekenregels

Voorwaarden. $a, b \geq 0$ en $m, n, p \in \mathbb{N}_0$; voor het quotiënt $b > 0$.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

In het boek: §1.3.2 · p.23–24

1.6 Machtswortels en teken

Voorwaarden. $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ even} \\ a & n \text{ oneven} \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

In het boek: §1.3.2 · p.23–24

1.7 Logaritmen

Voorwaarden. $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$ en $r \in \mathbb{R}$. Alleen voor de laatste formule geldt bovendien $x \neq 1$.

$$\log_a x = r \iff a^r = x$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad \log_a\left(a^r\right) = r$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$\log_a\left(x^r\right) = r\log_a x$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_b x = \frac{1}{\log_x b} \quad (x \neq 1)$$

In het boek: §1.3.5 · p.26–27

1.8 Merkwaardige producten

Voorwaarden. $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3$$
$$(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 + b^3$$

In het boek: §1.4 · p.27

1.9 Sommatie-identiteiten

Voorwaarden. $n \in \mathbb{N}_0$; $x \in \mathbb{R}$ en bij de meetkundige som $x \neq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \quad (x \neq 1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$$

In het boek: §1.5 · p.28–30

1.10 Veeltermdeling en reststelling

Voorwaarden. p, q, t, r zijn veeltermen; $q \neq 0$ en $r = 0$ of de graad van r is kleiner dan die van q. Bij deling door $x - b$ geldt $b \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = t(x)\,q(x) + r(x)$$
$$r = p(b) \quad \text{bij deling door } x - b$$
$$p(x) \text{ deelbaar door } x - b \iff p(b) = 0$$

In het boek: §1.6.1 en §1.6.3 · p.34–38

1.11 Eerste- en tweedegraadsvergelijkingen

Voorwaarden. Reële oplossingen; $a \neq 0$

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0: \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = 0: \quad x = -\frac{b}{2a}$$

$$D < 0: \quad \text{geen reële oplossingen}$$

In het boek: §1.6.2 · p.37

1.12 Complexe getallen

Voorwaarden. $z = a + bi$, $w = c + di$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; voor de inverse $z \neq 0$.

$$i^2 = -1$$

$$z + w = (a + c) + (b + d)\, i$$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i$$

In het boek: §1.8.1–1.8.2

1.13 Toevoeging van complexe getallen

Voorwaarden. $z, w \in \mathbb{C}$; bij het quotiënt $w \neq 0$; $n \geq 1$ geheel.

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad (w \neq 0)$$

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \qquad \overline{\overline{z}} = z$$

In het boek: §1.8.2

1.14 Complexe wortels van een tweedegraadsveelterm

Voorwaarden. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ en $D = b^2 - 4ac < 0$.

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b \pm \sqrt{-D}\, i}{2a}$$

In het boek: §1.8.3

2 Lineaire algebra

2.1 Matrixbewerkingen en orde

Voorwaarden. $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ bij optelling; $\lambda \in \mathbb{R}$. Bij het product heeft A afmeting $m \times n$ en B afmeting $n \times p$; $C = AB$ heeft orde $m \times p$. Alle matrixproducten hebben passende orde.

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$C = AB \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$$A(BC) = (AB)C \qquad I_m A = A = A I_n$$

Matrixproducten zijn in het algemeen niet commutatief.

In het boek: §2.1.1–2.1.2

2.2 Transponeren

Voorwaarden. Matrices hebben passende orde; $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

In het boek: §2.1.1–2.1.2

2.3 Inverse matrices

Voorwaarden. A is een inverteerbare vierkante matrix van orde n.

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

In het boek: §2.1.3

2.4 Determinanten

Voorwaarden. $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ en $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \qquad \det\left(A^T\right) = \det(A)$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad \text{voor een driehoeksmatrix}$$

Twee rijen verwisselen keert het teken om. Een veelvoud van een andere rij bij een rij optellen behoudt de determinant. Een rij met een factor vermenigvuldigen vermenigvuldigt de determinant met die factor.

In het boek: §2.3.1

2.5 Cofactorontwikkeling

Voorwaarden. A is een vierkante matrix van orde $n > 1$. A_{ij} is de cofactor van a_{ij}: $(-1)^{i+j}$ maal de determinant na schrappen van rij i en kolom j.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad \text{(ontwikkeling naar rij } i\text{)}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \quad \text{(ontwikkeling naar kolom } j\text{)}$$

In het boek: §2.3.1

2.6 Adjunctmatrix en het bestaan van een inverse

Voorwaarden. $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. De adjunctmatrix ontstaat door de cofactormatrix te transponeren. Voor de inverseformule geldt $\det(A) \neq 0$.

$$A \text{ inverteerbaar} \iff \det(A) \neq 0$$

$$A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) A = \det(A) I_n$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

In het boek: §2.3.2

2.7 Regel van Cramer

Voorwaarden. A is een vierkante matrix van orde n, $|A| = \det(A) \neq 0$. A_i ontstaat door kolom i van A te vervangen door de kolom B van de onafhankelijke termen. Dit is de unieke oplossing van het stelsel $AX = B$.

$$\left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_n|}{|A|} \right)$$

In het boek: §2.3.2

3 Vlakke meetkunde

3.1 Rechten: vectoren en parameters

Voorwaarden. In E^2; $\vec{v} \neq \vec{o}$. Voor de tweepuntvorm $\vec{a} \neq \vec{b}$.

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \left(\vec{b} - \vec{a} \right) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

In het boek: §3.2 en §3.4.1

3.2 Rechten: cartesische vormen

Voorwaarden. $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $(a, b) \neq (0, 0)$. De vorm met m geldt voor niet-verticale rechten. De punten hebben coördinaten $\vec{a} = (a_1, a_2)$ en $\vec{b} = (b_1, b_2)$; (v_1, v_2) zijn richtingsgetallen.

$$ax + by + c = 0 \qquad (a, b) \neq (0, 0)$$

$$y = mx + q$$

$$m = \frac{v_2}{v_1} \quad (v_1 \neq 0)$$

$$y = m(x - a_1) + a_2$$

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \quad (a_1 \neq b_1)$$

In het boek: §3.4

3.3 Norm, afstand en inproduct

Voorwaarden. Vectoren in E^2 met een orthonormale basis. Voor de hoek $\alpha \in [0, \pi]$ zijn beide vectoren niet nul.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v} - \vec{u}\| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

In het boek: §3.5

3.4 Ligging en afstand tot een rechte

Voorwaarden. $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{o}$ zijn richtingsvectoren; bij evenwijdigheid $k \neq 0$. Voor de afstand $\vec{p} = (x_0, y_0)$ en $(a, b) \neq (0, 0)$.

$$\vec{v} = k\vec{w} \quad \text{(evenwijdige richtingsvectoren)}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$$

$$m_1 m_2 = -1 \quad \text{(loodrechte niet-verticale rechten)}$$

$$\vec{n} = (a, b) \quad \text{voor de rechte } D : ax + by + c = 0$$

$$d(\vec{p}, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

In het boek: §3.5–3.6

3.5 Cirkel en ellips

Voorwaarden. Middelpunt (x_0, y_0); $r, a, b > 0$. De assen zijn evenwijdig met de coördinaatassen.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

In het boek: §3.8.1–3.8.2

3.6 Parabool

Voorwaarden. Top (x_0, y_0) en $a \neq 0$.

$$y = a\,(x - x_0)^2 + y_0$$
$$x = a\,(y - y_0)^2 + x_0$$

In het boek: §3.8.3

3.7 Hyperbool en asymptoten

Voorwaarden. Middelpunt (x_0, y_0); $a, b > 0$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1$$
$$\frac{x - x_0}{a} - \frac{y - y_0}{b} = 0 \qquad \frac{x - x_0}{a} + \frac{y - y_0}{b} = 0$$
$$xy = k \quad (k \neq 0) \quad \text{(orthogonale hyperbool)}$$

In het boek: §3.8.4

4 Goniometrie

4.1 Graden en radialen

Voorwaarden. p is de hoekmaat in graden en α de hoekmaat in radialen. Het zijn de notaties uit het boek.

$$360^\circ = 2\pi \,\text{rad}$$
$$p^\circ = p\frac{\pi}{180}\,\text{rad} \qquad \alpha\,\text{rad} = \alpha\frac{180}{\pi}{}^\circ$$

In het boek: §4.1

4.2 Goniometrische getallen en grondformule

Voorwaarden. $\alpha \in \mathbb{R}$. Voor tan, sec geldt $\cos\alpha \neq 0$; voor cot, csc geldt $\sin\alpha \neq 0$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$
$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$
$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

In het boek: §4.2 en §4.4

4.3 Bijzondere hoeken

Voorwaarden. Hoekmaten in radialen. Een streepje betekent: niet gedefinieerd.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

In het boek: §4.2.1

4.4 Verwante hoeken en periodiciteit

Voorwaarden. $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$; de tangens moet gedefinieerd zijn.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$
$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$$

In het boek: §4.2.2 en §6.7.1–6.7.2

4.5 Rechthoekige driehoeken

Voorwaarden. A is de schuine zijde; B, C zijn de rechthoekszijden. γ is een scherpe hoek.

$$A^2 = B^2 + C^2$$
$$\sin\gamma = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$$
$$\cos\gamma = \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$$
$$\tan\gamma = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}}$$

In het boek: §4.3.1

4.6 Sinus- en cosinusregel

Voorwaarden. Niet-ontaarde driehoek met zijden $A, B, C > 0$ en overstaande hoeken $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$.

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha$$
$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$

In het boek: §4.3.2

4.7 Som- en verschilformules

Voorwaarden. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Voor tangens: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

In het boek: §4.4

4.8 Verdubbelingsformules

Voorwaarden. $\alpha \in \mathbb{R}$; voor tangens $\cos\alpha \neq 0$ en $1 - \tan^2\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

In het boek: §4.4

4.9 Formules van Carnot

Voorwaarden. $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$
$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

In het boek: §4.4

4.10 De t-formules

Voorwaarden. $t = \tan(\alpha/2)$ moet bestaan, dus $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ voor $k \in \mathbb{Z}$. Voor $\tan\alpha$ bovendien $t \neq \pm 1$.

$$\cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$$
$$\tan\alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$$

In het boek: §4.4

4.11 Formules van Simpson

Voorwaarden. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

In het boek: §4.4

4.12 Omgekeerde formules van Simpson

Voorwaarden. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

In het boek: §4.4

4.13 Cyclometrische getallen

Voorwaarden. Voor Bgsin en Bgcos geldt $x \in [-1, 1]$; voor Bgtan en Bgcot geldt $x \in \mathbb{R}$. Hoekmaten in radialen.

$$y = \mathrm{Bgsin}\, x \iff \sin y = x \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$
$$y = \mathrm{Bgcos}\, x \iff \cos y = x \qquad 0 \leq y \leq \pi$$
$$y = \mathrm{Bgtan}\, x \iff \tan y = x \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$
$$y = \mathrm{Bgcot}\, x \iff \cot y = x \qquad 0 < y < \pi$$

In het boek: §4.5

4.14 Goniometrische basisvergelijkingen

Voorwaarden. $k \in \mathbb{Z}$; voor de eerste twee regels $c \in [-1, 1]$ en voor de laatste $d \in \mathbb{R}$.

$$\sin x = c \iff \begin{cases} x = \operatorname{Bgsin} c + 2k\pi \\ \text{of } x = \pi - \operatorname{Bgsin} c + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos x = c \iff x = \pm \operatorname{Bgcos} c + 2k\pi$$

$$\tan x = d \iff x = \operatorname{Bgtan} d + k\pi$$

In het boek: §4.6.1

4.15 Poolcoördinaten

Voorwaarden. $r \geq 0$; de hoek θ wordt bepaald op een geheel veelvoud van 2π na.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

In het boek: §4.7

4.16 Modulus en inverse van complexe getallen

Voorwaarden. $z = a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$. Voor de inverse $z \neq 0$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

In het boek: §4.8.1–4.8.2

4.17 Complexe getallen: goniometrische vorm

Voorwaarden. $z_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)$ met $r_j = |z_j|$; voor het quotiënt $z_2 \neq 0$. θ is een argument van z; voor De Moivre $n \geq 1$ geheel.

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Zie H1: Complexe getallen

In het boek: §4.8.1–4.8.2

4.18 Complexe machtswortels

Voorwaarden. $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ en $n \geq 1$ geheel. De formules geven de n verschillende n-de machtswortels van z.

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

In het boek: §4.8.3

5 Ruimtemeetkunde

5.1 Rechten in de ruimte

Voorwaarden. In E^3; $\vec{v} \neq \vec{o}$. Door twee verschillende punten kan $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ genomen worden.

$$\vec{x} = \vec{a} + \mu\vec{v} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \quad (v_1 v_2 v_3 \neq 0)$$

Als een richtingsgetal nul is, gebruik de parametervorm of vervang de bijbehorende breuk door de vergelijking van die constante coördinaat.

In het boek: §5.1.1 en §5.3.1–5.3.2

5.2 Vlakken: vectoren en parameters

Voorwaarden. $\vec{v}, \vec{w}$ zijn niet-evenwijdige, niet-nulle richtingsvectoren. Door drie niet-collineaire punten kan $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{w} = \vec{c} - \vec{a}$ genomen worden.

$$\vec{x} = \vec{a} + \mu\vec{v} + \lambda\vec{w} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

In het boek: §5.1.2 en §5.3.3

5.3 Vlakken: cartesische vergelijking

Voorwaarden. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$; $\vec{n}$ is een normaalvector.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

In het boek: §5.3.4 en §5.5.1

5.4 Norm, afstand en inproduct in de ruimte

Voorwaarden. Vectoren in E^3 in een orthonormale basis. Voor de hoek $\alpha \in [0, \pi]$ zijn beide betrokken vectoren niet nul.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \cos\alpha$$

In het boek: §5.4

5.5 Loodrechte en evenwijdige stand

Voorwaarden. Richtingsvectoren van rechten en normaalvectoren van vlakken zijn niet nul. $k \neq 0$. Het vlak heeft vergelijking $ax + by + cz + d = 0$; bij twee vlakken zijn de normaalvectoren (a_i, b_i, c_i).

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \quad \text{(loodrechte rechten)}$$

$$(a, b, c) = k\,(v_1, v_2, v_3) \quad \text{(rechte loodrecht op vlak)}$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \quad \text{(loodrechte vlakken)}$$

$$(v_1, v_2, v_3) = k\,(w_1, w_2, w_3) \quad \text{(evenwijdige rechten)}$$

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \quad \text{(rechte evenwijdig met vlak)}$$

Zoals in het boek betekent loodrecht voor twee rechten dat hun richtingsvectoren orthogonaal zijn; de rechten hoeven elkaar niet te snijden.

In het boek: §5.5.1–5.5.2

5.6 Afstand tussen een punt en een vlak

Voorwaarden. $\vec{p} = (x_0, y_0, z_0)$; het vlak α heeft vergelijking $ax + by + cz + d = 0$ met $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

$$d\,(\vec{p}, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

In het boek: §5.5.4

5.7 Vectorieel en gemengd product

Voorwaarden. Vectoren in E^3 ten opzichte van een positief georiënteerde orthonormale basis.

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

De determinant met basisvectoren in de eerste rij is een geheugensteun, zoals in het boek.

In het boek: §5.6.1–5.6.2

5.8 Oppervlakte en volume met vectoren

Voorwaarden. Voor het parallellogram zijn $\vec{v}, \vec{w}$ niet-evenwijdig. Voor het parallellepipedum liggen $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ niet in één vlak met de oorsprong.

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| \quad \text{(oppervlakte parallellogram)}$$

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| \quad \text{(volume parallellepipedum)}$$

In het boek: §5.6.1–5.6.2

5.9 Oppervlakte en volume van ruimtelijke figuren

Voorwaarden. $l, b, h, r > 0$; G is de grondvlakoppervlakte. De cilinder en kegel zijn recht en cirkelvormig; $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ is de schuine zijde van de kegel. O is de totale oppervlakte.

$$\text{Balk:} \quad V = lbh \qquad O = 2\,(lb + bh + lh)$$

$$\text{Cilinder:} \quad V = \pi r^2 h \qquad O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$\text{Prisma:} \quad V = Gh \qquad O = 2G + O_{\text{zijvlakken}}$$

$$\text{Piramide:} \quad V = \frac{1}{3}Gh \qquad O = G + O_{\text{zijvlakken}}$$

$$\text{Kegel:} \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad O = \pi r^2 + \pi r s$$

$$\text{Bol:} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad O = 4\pi r^2$$

In het boek: §5.6.3

6 Reële functies

6.1 Bewerkingen met functies

Voorwaarden. $f, g : A \to \mathbb{R}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$; voor het quotiënt is $g(x) \neq 0$ voor elke $x \in A$.

$$\lambda f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda f(x)$$
$$f + g : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$f \cdot g : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)\, g(x)$$
$$\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

In het boek: §6.1.3

6.2 Samenstelling van functies

Voorwaarden. $f : A \to B$ en $g : B \to C$ zijn reële functies.

$$g \circ f : A \to C : x \mapsto g(f(x))$$

In het boek: §6.1.3

6.3 Inverse functies

Voorwaarden. $f : A \to B$ is bijectief: elk getal uit het codomein B is het beeld van precies één getal uit het domein A.

$$f^{-1} : B \to A$$
$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

In het boek: §6.1.4

6.4 Verschuiven en herschalen

Voorwaarden. $k \in \mathbb{R}$; voor een herschaling $k \neq 0$. De voorschriften worden gebruikt waar ze gedefinieerd zijn.

$$y = f(x) + k \quad \text{(verticale verschuiving)}$$
$$y = f(x - k) \quad \text{(horizontale verschuiving)}$$
$$y = kf(x) \quad \text{(verticale herschaling)}$$
$$y = f(kx) \quad \text{(horizontale herschaling)}$$

Bij horizontale verschuiving geeft $k > 0$ een verschuiving naar rechts. Bij horizontale herschaling geeft $|k| > 1$ een samendrukking; $k < 0$ geeft ook een spiegeling.

In het boek: §6.1.5

6.5 Even en oneven functies

Voorwaarden. $f : A \to B$; het domein A is symmetrisch ten opzichte van 0. De gelijkheden gelden voor elke $x \in A$.

$$f \text{ even} \iff f(-x) = f(x)$$
$$f \text{ oneven} \iff f(-x) = -f(x)$$

In het boek: §6.1.1

6.6 Natuurlijke exponentiaal en logaritme

Voorwaarden. Voor de exponentiaal $x, y \in \mathbb{R}$; voor logaritmen $x, y > 0$ en $r \in \mathbb{R}$. In de laatste formule bovendien $y \neq 1$.

$$\ln : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$$
$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$$
$$\exp(x+y) = \exp x \, \exp y$$
$$\exp(-x) = (\exp x)^{-1} \qquad \exp(xy) = (\exp x)^y$$
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \ln(x^r) = r \ln x$$
$$\ln x = \ln y \, \log_y x \quad (y \neq 1)$$

Zie H1: Logaritmen
Zie H1: Machten met reële exponenten
In het boek: §6.6.1

6.7 Algemene sinusoïde

Voorwaarden. Voor de vermelde bereik- en periodeformule $a > 0$ en $b > 0$; $c \in \mathbb{R}$. In de fysische schrijfwijze zijn A de amplitude, ω de pulsatie en ϕ de fase.

$$f(x) = a \sin(bx + c)$$
$$\text{bereik} = [-a, a] \qquad \text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$
$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

In het boek: §6.7.1

6.8 Domein en codomein van basisfuncties

Voorwaarden. Voor de exponentiële en logaritmische functie $a > 0$ en $a \neq 1$. Zoals in het boek wordt het codomein met de pijl aangeduid; het bereik kan kleiner zijn.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x$$
$$\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x$$
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$
$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

Zie H4: Cyclometrische getallen
In het boek: §6.6–6.7

7 Analyse

Bij onbepaalde integralen volgen we de algebraïsche aanpak van het boek. De formules worden gebruikt waar de uitdrukkingen betekenis hebben; het domein wordt niet telkens afzonderlijk besproken.

7.1 Rekenkundige en meetkundige rijen

Voorwaarden. $n \geq 1$ geheel; r_1 is de eerste term. Het recursieve voorschrift geldt voor $n \geq 2$. Voor de meetkundige machtvorm nemen we $q \neq 0$; de recursieve vorm geldt ook voor $q = 0$.

$$r_n = r_1 + (n-1)\,v \qquad r_n = r_{n-1} + v$$

$$s_n = r_1 + \cdots + r_n = n\frac{r_1 + r_n}{2}$$

$$r_n = r_1 q^{n-1} \qquad r_n = r_{n-1} q$$

$$s_n = r_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

$$s_n = n r_1 \quad (q = 1)$$

In het boek: §7.1.2

7.2 Rekenregels voor limieten

Voorwaarden. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ en $\lim_{x \to a} g(x) = c$ zijn eindig; voor het quotiënt $c \neq 0$. Voor de laatste regel bestaan de domeinen aan beide zijden van a.

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = b + c$$

$$\lim_{x \to a} \left(f(x)\, g(x)\right) = bc$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = L$$

In het boek: §7.2.4

7.3 Basislimieten: machten en rationale functies

Voorwaarden. $k \in \mathbb{N}_0$. Voor $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ geldt $a_n \neq 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & k \text{ even} \\ -\infty & k \text{ oneven} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^k} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^k} = \begin{cases} +\infty & k \text{ even} \\ -\infty & k \text{ oneven} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

In het boek: §7.2.5–7.2.6

7.4 Basislimieten: exponentiaal en logaritme

Voorwaarden. $a > 0$; in de laatste formule $a > 1$ en $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$$

In het boek: §7.2.5

7.5 Bijzondere limieten bij nul

Voorwaarden. $a, b \in \mathbb{R}$; voor de macht wordt $x \neq 0$ en $1 + ax > 0$ genomen. Hoekmaten in radialen.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab}$$

In het boek: §7.2.5

7.6 Asymptoten

Voorwaarden. Elke richting ($+\infty$ of $-\infty$) wordt apart onderzocht. Bij een verticale asymptoot ligt a buiten het domein en bevat het domein een eenzijdige omgeving van a. Bij de schuine asymptoot zijn a, b eindig en $a \neq 0$.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \text{ of } \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \implies x = a \text{ verticale asymptoot}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \implies y = b \text{ horizontale asymptoot}$$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \implies \quad y = ax + b \text{ asymptoot}$$

Dezelfde formules gelden met $x \to -\infty$. De limiet die b bepaalt hoeft niet nul te zijn.

In het boek: §7.3

7.7 Continuïteit en afgeleide in een punt

Voorwaarden. a behoort tot het domein; voor de afgeleide is f gedefinieerd in een omgeving van a en bestaat de eindige limiet.

$$f \text{ continu in } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$f \text{ afleidbaar in } a \implies f \text{ continu in } a$$

In het boek: §7.4–7.5

7.8 Rekenregels voor afgeleiden

Voorwaarden. f, g zijn afleidbaar in a en $c, d \in \mathbb{R}$. Voor het quotiënt $g(a) \neq 0$. Voor de kettingregel is g afleidbaar in $f(a)$.

$$(cf + dg)'(a) = cf'(a) + dg'(a)$$
$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$$
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\,f'(a)$$

In het boek: §7.5

7.9 Basisafgeleiden: machten, exponentiaal en logaritme

Voorwaarden. $c, p \in \mathbb{R}$. Voor x^p nemen we $x > 0$; voor positieve gehele machten geldt de regel ook waar het boek de veeltermfunctie definieert. Voor a^x geldt $a > 0$ en voor $\log_a x$ bovendien $a \neq 1$. Logaritmen en de wortelafgeleide vereisen $x > 0$.

$$(c)' = 0 \qquad (x)' = 1 \qquad (x^p)' = px^{p-1}$$
$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

In het boek: §7.5

7.10 Basisafgeleiden: goniometrie en cyclometrie

Voorwaarden. Hoekmaten in radialen. Tangens vereist $\cos x \neq 0$, cotangens $\sin x \neq 0$. Voor Bgsin en Bgcos geldt $-1 < x < 1$; voor Bgtan en Bgcot geldt $x \in \mathbb{R}$.

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$
$$(\mathrm{Bgsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\mathrm{Bgcos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\mathrm{Bgtan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\mathrm{Bgcot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

In het boek: §7.5

7.11 Raaklijn en functieonderzoek

Voorwaarden. Voor de raaklijn en de extremumvoorwaarde is a een inwendig punt waar f afleidbaar is. Voor stijgen/dalen is f continu op $[a, b]$ en afleidbaar op $]a, b[$; de tekens gelden op dat hele open interval. Voor convexiteit/concaviteit is f tweemaal afleidbaar op een open interval.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$f' > 0 \implies f \text{ strikt stijgend} \qquad f' < 0 \implies f \text{ strikt dalend}$$

$$f \text{ lokaal extremum in } a \implies f'(a) = 0$$

$$f'' > 0 \implies f \text{ convex} \qquad f'' < 0 \implies f \text{ concaaf}$$

Zoals in het boek volstaat $f'(a) = 0$ niet om tot een extremum te besluiten. Onderzoek daarvoor de tekenwisseling van f'.

In het boek: §7.6

7.12 Basisintegralen: machten en exponentiaal

Voorwaarden. $c \in \mathbb{R}$. Voor de vermelde machtsregel $p \neq -1$; voor a^x geldt $a > 0$ en $a \neq 1$.

$$\int x^p \, \mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$$

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c \qquad \int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Voor gehele machten geldt de formule ook voor negatieve waarden van x, voor zover de integrand gedefinieerd is.

In het boek: §7.7.1

7.13 Basisintegralen: goniometrie en cyclometrie

Voorwaarden. Hoekmaten in radialen; $c \in \mathbb{R}$. Voor de laatste formule $-1 < x < 1$.

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c \qquad \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x = \mathrm{Bgtan}\, x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \mathrm{Bgsin}\, x + c$$

In het boek: §7.7.1

7.14 Lineariteit, substitutie en partiële integratie

Voorwaarden. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. De substitutie wordt volledig naar de nieuwe variabele omgezet; bij partiële integratie worden f en g afleidbaar verondersteld.

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x \qquad t = g(x)$$

$$\int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

In het boek: §7.7.1–7.7.3

7.15 Bepaalde integralen en hoofdstelling

Voorwaarden. f, g zijn continu op $[a, b]$; F is een primitieve van f; $c \in [a, b]$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

In het boek: §7.8

7.16 Oppervlakte door integratie

Voorwaarden. $a < b$; f, g zijn continu op $[a, b]$.

$$O = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$O_{\text{tussen}} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

In het boek: §7.8, Toepassingen

8 Logica, verzamelingen en bewijstechnieken

8.1 Logische verbindingen

Voorwaarden. p, q zijn uitspraken; 1 betekent waar en 0 onwaar. De 'of'-verbinding is inclusief: p of q of beide.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Het boek onderscheidt de verbinding $p \to q$ van de implicatie $p \Rightarrow q$: bij die laatste is $p \to q$ een tautologie.

In het boek: §8.1.1

8.2 Logische equivalenties

Voorwaarden. p, q zijn uitspraken.

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$$
$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$$
$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$
$$\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

In het boek: §8.1.1

8.3 Negatie van kwantoren

Voorwaarden. $p(x)$ is een predicaat met universum $\mathcal{U}$, zoals in het boek.

$$\neg(\forall x \in \mathcal{U} : p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{U} : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x \in \mathcal{U} : p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U} : \neg p(x)$$

In het boek: §8.1.2

8.4 Bewerkingen met verzamelingen

Voorwaarden. X, Y zijn verzamelingen. In de laatste formule is A een deelverzameling van de vaste verzameling X.

$$X \cap Y = \{x : x \in X \wedge x \in Y\}$$
$$X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y\}$$
$$X \setminus Y = \{x : x \in X \wedge x \notin Y\}$$
$$A^c = X \setminus A$$

In het boek: §8.2

8.5 Cartesisch product

Voorwaarden. X, Y zijn verzamelingen; (x, y) is een geordend paar.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$$

In het boek: §8.2

9 Kansrekening en statistiek

9.1 Som- en productregel voor aantallen

Voorwaarden. A, B zijn eindige verzamelingen. Bij de productregel zijn er in stap i steeds n_i mogelijkheden, ongeacht de eerdere keuzes.

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$n_1 n_2 \cdots n_r \quad \text{(aantal mogelijkheden bij de productregel)}$$

In het boek: §9.1.1

9.2 Permutaties en variaties

Voorwaarden. $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; zonder herhaling $0 \leq p \leq n$. De volgorde telt mee. Voor herhalingspermutaties zijn $n_1 + \cdots + n_r = n$.

$$0! = 1 \qquad n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \qquad P_n = n!$$

$$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad \overline{V}_n^p = n^p$$

$$P_n^{n_1,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}$$

In het boek: §9.1.2

9.3 Combinaties, Pascal en Newton

Voorwaarden. $n, p \in \mathbb{N}$, voor gewone combinaties $0 \leq p \leq n$; de volgorde telt niet mee. Voor herhalingscombinaties $n \geq 1$. Voor Pascal $1 \leq p \leq n-1$. Voor Newton $a, b \in \mathbb{R}$ en $n \geq 1$.

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \qquad C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$\overline{C}_n^p = C_{n+p-1}^p$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad (1 \leq p \leq n-1)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

In het boek: §9.1.3

9.4 Gemiddelde en relatieve frequenties

Voorwaarden. $n \geq 1$ waarnemingen $x_1, \ldots, x_n$. De k verschillende waarden ω_j hebben absolute frequentie F_j en relatieve frequentie f_j.

$$f_j = \frac{F_j}{n}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_j f_j$$

In het boek: §9.2.1

9.5 Beschrijvende spreidingsmaten

Voorwaarden. $n \geq 1$; $\overline{x}$ is het gemiddelde en f_j zijn relatieve frequenties. Hier wordt door n gedeeld: dit zijn beschrijvende maten.

$$R = \max_i x_i - \min_i x_i$$

$$\text{Mad} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| = \sum_j |\omega_j - \overline{x}| f_j$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_j \left(\omega_j - \overline{x}\right)^2 f_j$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\sum_j \left(\omega_j - \overline{x}\right)^2 f_j}$$

In het boek: §9.2.1

9.6 Schatting van variantie en standaardafwijking

Voorwaarden. Een steekproef met $n \geq 2$ waarnemingen. In deze formules zijn s^2 en s de te schatten spreidingsmaten van de populatie, zoals in het boek.

$$s^2 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

$$s \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

In het boek: §9.2.1, Schatten van spreidingsmaten

9.7 Kanswetten en uniforme kans

Voorwaarden. A, B zijn gebeurtenissen in een kansruimte met uitkomstenverzameling Ω. Voor Laplace is Ω eindig, niet leeg en zijn alle uitkomsten even waarschijnlijk.

$$P(\Omega) = 1 \qquad P(\varnothing) = 0 \qquad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \quad \text{(uniforme kans)}$$

In het boek: §9.3

9.8 Voorwaardelijke kans en onafhankelijkheid

Voorwaarden. Voor $P(A \mid B)$ geldt $P(B) > 0$; voor $P(B \mid A)$ geldt $P(A) > 0$. De definitie van onafhankelijkheid vereist geen strikt positieve kansen.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) = P(A)\,P(B \mid A)$$

$$A, B \text{ onafhankelijk} \iff P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

In het boek: §9.3

9.9 Totale kans en Bayes

Voorwaarden. $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ is een eindige partitie met $P(A_i) > 0$ voor alle i. Voor Bayes bovendien $P(B) > 0$.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)\, P(A_i)$$

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k)\, P(A_k)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)\, P(A_i)}$$

In het boek: §9.3, Kanswetten

9.10 Productwet voor meerdere gebeurtenissen

Voorwaarden. $k \geq 2$. Alle conditionerende doorsneden $A_j \cap \cdots \cap A_k$ voor $j = 2, \ldots, k$ hebben strikt positieve kans.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1 \mid A_2 \cap \cdots \cap A_k) \\ \cdot P(A_2 \mid A_3 \cap \cdots \cap A_k) \\ \cdots P(A_{k-1} \mid A_k)\, P(A_k) \end{aligned}$$

In het boek: §9.3, Kanswetten

9.11 Discrete kansveranderlijken

Voorwaarden. x_i zijn de verschillende mogelijke waarden van de discrete kansveranderlijke X. Voor de verwachting en variantie moeten de betrokken sommen convergeren.

$$f_X(x_i) = P(X = x_i)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$$

$$E(X) = \sum_i x_i f_X(x_i)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 f_X(x_i)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

In het boek: §9.4

9.12 Binomiale verdeling

Voorwaarden. X telt successen in $n \geq 1$ onafhankelijke proeven met dezelfde succeskans $p \in]0, 1[$; $q = 1 - p$, $k = 0, \ldots, n$. Bij $p = 0$ of $p = 1$ is X constant.

$$X \sim B(n, p) \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$E(X) = np \qquad \mathrm{Var}(X) = npq \qquad \sigma_X = \sqrt{npq}$$

In het boek: §9.5.1

9.13 Continue kansveranderlijken

Voorwaarden. f is een kansdichtheid en $a \leq b$. De integralen voor verwachting en variantie moeten convergeren; voor de verwachting wordt absolute convergentie vereist.

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \qquad P(X = a) = 0$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

In het boek: §9.5.2

9.14 Normale verdeling en standaardiseren

Voorwaarden. $X \sim N(\mu, \sigma)$ met $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$. De tweede parameter is de standaardafwijking. F is de verdelingsfunctie van X; voor intervalkansen $a \leq b$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$E(X) = \mu \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \qquad \sigma_X = \sigma$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad Z \sim N(0, 1)$$

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

In het boek: §9.5.3